30. Wenn von drei rationalen Zahlen a, b und c mit $0 < a \leq b \leq c$ bekannt ist, dass $a + b + c = 20{,}1$ ist, welche der Aussagen gilt dann allgemein?

(**A**) Es ist stets $b \cdot c < 99$ (**B**) Es gilt stets $b \cdot c > 0,001$

(**C**) Es gilt stets $b \cdot c \neq 75$ (**D**) Es gilt stets $b \cdot c \neq 25$

(**E**) Keine der Aussagen **A**) bis **D**) gilt allgemein.

Lösung: Dass die Lösungsmöglichkeit (**A**) falsch ist, erkennt man schnell. Es muss nur $a = 0,1, b = c = 10$ gewählt werden, dann ist offenbar $a + b + c = 20,1$ und außerdem $b \cdot c = 100 > 99$. Um zu zeigen, dass auch (**B**) nicht zutrifft, muss schon etwas mehr Denkarbeit geleistet werden. Es müssen zuerst einmal a und b sehr klein gewählt werden. Wählen wir $b = \dfrac{0,001}{100} = 0,00001 = a$, so wäre $c = 20,1 - 2 \cdot 0,00001 = 20,09998$, die Bedingung $a + b + c = 20,1$ ist erfüllt und außerdem ist $b \cdot c < 100 \cdot 0,00001 = 0,001$. Um zu zeigen, dass weder (**C**) noch (**D**) gelten muss, setzen wir $a = 0,1$ und stellen für b und c die folgenden Gleichungssysteme auf (zuerst für $b \cdot c = 75$): Es soll gelten $b + c = 20$ und $b \cdot c = 75$. Setzen wir aus der ersten Gleichung in die zweite ein, finden wir $b \cdot (20 - b) = 75$. Das ist eine quadratische Gleichung für b: $b^2 - 20b + 75 = 0$, die die Lösungen $b_{1;2} = 10 \pm \sqrt{100 - 75}$ bzw. $b_1 = 5$ hat, woraus $c = 15$ folgt, und es ist dann in der Tat $a + b + c = 20,1$ und $b \cdot c = 75$. Für den anderen Wert, 25, ist die Betrachtung analog durchzuführen. Als Werte erhält man hier $b = 10 - 5\sqrt{3}$, $c = 10 + 5\sqrt{3}$. Und wieder gilt $a + b + c = 20,1$ und hier nun $b \cdot c = 100 - 75 = 25$.

In der folgenden Tabelle sind die Antwortbuchstaben für die Aufgaben aus den Klassenstufen 7 und 8 zusammengefasst:

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Antwort	B	D	D	A	D	E	B	A	C	E
Aufgabe	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Antwort	C	E	A	D	B	B	C	E	A	E
Aufgabe	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Antwort	D	C	D	A	B	D	C	A	C	E